Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 1

Miércoles 11 de noviembre de 2015 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[120 puntos]**.

13 páginas

8815 – 7225

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

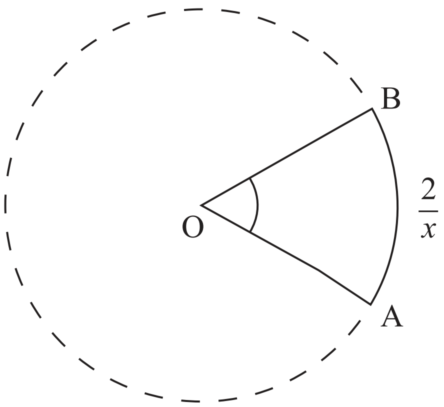
Sección A

Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 4]

La siguiente figura muestra un sector circular, donde $\mathrm{A\hat{O}B} = x$ radianes y la longitud del arco $\mathrm{AB} = \dfrac{2}{x}\,\mathrm{cm}$.

Sabiendo que el área del sector circular es igual a $16\,\mathrm{cm}^2$, halle la longitud del arco AB.



2. [Puntuación máxima: 4]

Utilizando la integración por partes, halle $\int x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. [Puntuación máxima: 6]

(a) Escriba y simplifique el desarrollo de $(2+x)^4$ en potencias ascendentes de x. [3]

(b) A partir de lo anterior, halle el valor exacto de $(2,1)^4$. [3]

4. [Puntuación máxima: 6]

Considere la curva $y = \dfrac{1}{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.

(a) Halle $\dfrac{dy}{dx}$. [2]

(b) Determine la ecuación de la normal a la curva en el punto $x = 3$ en la forma $ax + by + c = 0$, donde a, b, $c \in \mathbb{Z}$. [4]

5. [Puntuación máxima: 4]

Utilice la sustitución $u = \ln x$ para hallar el valor de $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.

6. [Puntuación máxima: 7]

Una caja contiene cuatro bolas rojas y dos bolas blancas. Darren y Marty juegan a un juego en el que cada uno, por turnos, va sacando una bola de la caja, sin reposición. El primer jugador que saque una bola blanca es el ganador.

(a) Darren es el primero en jugar. Halle la probabilidad de que sea él quien gane el juego. [4]

Ahora se modifica el juego, de modo que la bola escogida se repone en la caja después de cada turno.
Nuevamente es Darren el primero en jugar.

(b) Muestre que la probabilidad de que Darren gane no ha cambiado. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. [Puntuación máxima: 8]

Una curva viene dada por $xy = y^2 + 4$.

(a) Muestre que no hay ningún punto en el que la tangente a la curva sea horizontal. [4]

(b) Halle las coordenadas de aquellos puntos en los que la tangente a la curva es vertical. [4]

8. [Puntuación máxima: 8]

(a) Muestre que $\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$. [1]

(b) Considere $f(x)=\operatorname{sen}(ax)$, donde a es una constante. Demuestre mediante inducción matemática que $f^{(n)}(x)=a^{n}\operatorname{sen}\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$, donde $n\in\mathbb{Z}^{+}$ y $f^{(n)}(x)$ representa la n-ésima derivada de $f(x)$. [7]

9. [Puntuación máxima: 7]

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} 2x - \cos 2x = 1 + \operatorname{sen} x - \cos x$ para $x \in [-\pi, \pi]$.

10. [Puntuación máxima: 6]

Una función polinómica viene dada por $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Las raíces de la ecuación polinómica $f(x) = 0$ son términos consecutivos de una progresión geométrica cuya razón común es igual a $\frac{1}{2}$ y cuyo primer término es 2.

Sabiendo que $a_{n-1} = -63$ y $a_n = 16$, halle

(a) el grado del polinomio; [4]

(b) el valor de a_0. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

11. [Puntuación máxima: 17]

(a) Resuelva la ecuación $z^3 = 8\mathrm{i}$, $z \in \mathbb{C}$ y dé las respuestas en la forma $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$ **y** en la forma $z = a + b\mathrm{i}$, donde a, $b \in \mathbb{R}$. [6]

(b) Considere los números complejos $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ y $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

(i) Escriba z_1 en la forma $r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

(ii) Calcule $z_1 z_2$ y escriba el resultado en la forma $z = a + b\mathrm{i}$, donde a, $b \in \mathbb{R}$.

(iii) A partir de lo anterior, halle el valor de $\tan\frac{5\pi}{12}$ en la forma $c + d\sqrt{3}$, donde c, $d \in \mathbb{Z}$.

(iv) Halle el menor valor $p > 0$ para el que $(z_2)^p$ es un número real positivo. [11]

12. [Puntuación máxima: 20]

Considere la función $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ definida en el dominio $-1 \le x \le 1$.

(a) Muestre que f es una función impar. [2]

(b) Halle $f'(x)$. [3]

(c) A partir de lo anterior, halle la coordenada x de todos los máximos o mínimos locales que haya. [3]

(d) Halle el recorrido de f. [3]

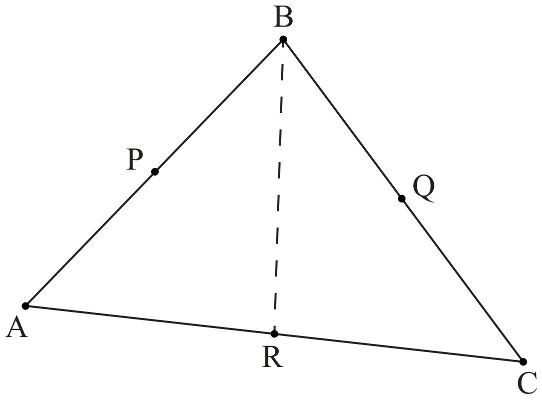
(e) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, indicando claramente las coordenadas de los puntos de corte con el eje x y de todos los máximos o mínimos locales que haya. [3]

(f) Halle el área de la región delimitada por el gráfico de $y = f(x)$ y el eje x para $x \ge 0$. [4]

(g) Muestre que $\int_{-1}^{1}\left|x\sqrt{1-x^2}\right|\mathrm{d}x > \left|\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right|$. [2]

No escriba soluciones en esta página.

13. [Puntuación máxima: 23]



Considere el triángulo ABC. Los puntos P, Q y R son los puntos medios de los segmentos de recta $[\mathrm{AB}]$, $[\mathrm{BC}]$ y $[\mathrm{AC}]$ respectivamente.

Sean $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ y $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{c}$.

(a) Halle $\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ en función de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. [2]

(b) (i) Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por B y por R en función de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ y de un parámetro λ.

(ii) Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por A y por Q en función de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ y de un parámetro μ.

(iii) A partir de lo anterior, muestre que $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$, sabiendo que G es el punto en el que se cortan $[\mathrm{BR}]$ y $[\mathrm{AQ}]$. [9]

(c) Muestre que el segmento de recta $[\mathrm{CP}]$ también incluye al punto G. [3]

Las coordenadas de los puntos A, B y C son $(1, 3, 1)$, $(3, 7, -5)$ y $(2, 2, 1)$ respectivamente.
Un punto X es tal que $[\mathrm{GX}]$ es perpendicular al plano ABC.

(d) Sabiendo que el tetraedro ABCX tiene un volumen de 12 unidades^3, halle posibles coordenadas de X. [9]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.